求解双曲守恒律初值问题的 GAUSS 格式

邱建贤
(南京航空航天大学理学院　南京·210016)
尤克义
(鹭江大学基础部　厦门· 361005)

摘要　构造了一类计算双曲守恒律弱解的 3 点二阶显式格式,这类格式在 CFL 条件数为 1 的限制下为TVD 格式,并将这类格式推广到方程组的情形,进行了数值试验,结果是满意的。

关键词　守恒律　TVD　通量　差分格式

1　引言

本文研究用 GAUSS 型差分格式求解一维单个守恒律初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \quad t>0, x\in R \\ \qquad\qquad f\in C^2(R) \\ u(x,0)=u_0(x) \quad x\in R \end{cases} \tag{1}$$

众所周知,当$f''\neq 0$时,即使$u_0(x)$是x的相当光滑的函数,(1)的解也可能产生间断,即产生激波。因此,寻求具有高分辨、不振荡等良好性质的激波捕捉方法一直是计算数学工作者大力研究的问题。1983 年,Harten[1]首创二阶 TVD(Total- Variation- Diminishing)格式,这类格式具有高分辨、不振荡等良好性质。

本文利用 Gauss 型求积公式改进,优化了EO 格式,构造了一类双曲守恒律的 3 点二阶显式 Gauss 格式。该格式在 CFL 条件数为 1 的限制下为TVD 格式。进而将格式推广到一维方程组的情形,建立了相应的差分格式。并进行了数值试验。试验结果是令人满意。

2　GAUSS 型差分格式

记空间步长为 h,时间步长为 k,步长比 $\lambda=k/h$, $X_j=jh$, $t_n=nk$, $u(x,t)$ 表示(1)的近似解, $u_j^n=u(jh,nk)$, $f_j^n=f(u_j^n)$, $\Delta u_{j+1/2}^n=u_{j+1}^n-u_j^n$

定义1.1: 如果 $\sum_j|\Delta u_{j+1/2}^n|$ 存在,则定义序列 $U^n=\{u_j^n\}$ 关于 x 的总变差为:

$$TV(U^n)=\sum_j|\Delta u_{j+1/2}^n|$$

定义 1.2: 如果差分格式的解满足: $TV(U^{n+1})\leqslant TV(U^n)$, 则称此差分格式为 TVD 格式。

1981 年, B. Engquist & S. Osher 构造一类单边的差分格式- EO 格式[3];

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda(h_{j+1/2}^n-h_{j-1/2}^n) \tag{2a}$$

$$h_{j+1/2}^n=\frac{1}{2}(f_{j+1}^n+f_j^n)-\frac{1}{2}\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n}|f'(u)|\,du \tag{2b}$$

EO 格式在 CFL 条件(3)的限制下为单调格式: $\lambda\sup|f'(u)|\leqslant 1$ 由于 EO 格式中含有积分表达式,在实际计算中有较大的难度,本文利用 Gauss 型求积公式,求解 EO 格式中的积分,构造了 Gauss 型求差分格式,研究其基本性质。为此将(2)的数值通量 $h_{j+1/2}^n$ 中的积分利用 Gauss 型求积公式求解得到:

收稿修回日期: 1999- 03- 11

$$\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n}|f'(u)|\,du = \frac{1}{2}\Delta u_{j+1/2}^n\left(\left|f'\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n+u_j^n\right]\right|+\left|f'\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n+u_j^n\right]\right|\right)$$

于是得到 Gauss 差分格式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n) \quad (4a)$$

$$h_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{4}\Delta u_{j+1/2}^n\left(\left|f'\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n+u_j^n\right]\right|+\left|f'\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n+u_j^n\right]\right|\right) \quad (4b)$$

利用泰勒展开式,容易证明:

定理 1. 1: 由(4)式定义的 Gauss 格式在 CFL 条件(3)限制下为二阶格式。

引理 1. 1[1]:如果 3 点守恒型格式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^n\Delta u_{j+1/2}^n - D_{j-1/2}^n\Delta u_{j-1/2}^n \quad (5)$$

有下列条件成立,则格式为 TVD 格式

Ⅰ) $0 \leqslant C_{j+1/2}^n$

Ⅱ) $0 \leqslant D_{j-1/2}^n$

Ⅲ) $0 \leqslant 1 - C_{j+1/2}^n - D_{j+1/2}^n$

定理 1. 2: 当 $f^{(5)}f' \leqslant 0$ 时,由(4)式定义的 Gauss 格式在 CFL 条件(3)限制下为 TVD 格式。

证明:将(4)改写为(5)的形式得:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^n\Delta u_{j+1/2}^n - D_{j-1/2}^n\Delta u_{j-1/2}^n \quad (6)$$

其中:

$$C_{j+1/2}^n = -\lambda[h_{j+1/2}^n - f_j^n]/\Delta u_{j+1/2}^n$$

$$D_{j+1/2}^n = -\lambda[h_{j+1/2}^n - f_{j+1}^n]/\Delta u_{j+1/2}^n$$

因为 $f^{(5)}f' \leqslant 0$,由 Gauss 型求积公式的误差估计可知:

$$\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n}|f'(u)|\,du/\Delta u_{j+1/2}^n \leqslant \left(\left|f'\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n+u_j^n\right]\right|+\left|f'\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n+u_j^n\right]\right|\right)/2$$

所以,

$$C_{j+1/2}^n = \frac{\lambda}{4}\left[\left|f'\left(u_j^n+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n\right)\right|+\left|f'\left(u_j^n+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n\right)\right|\right]-\frac{\lambda}{2}[f_{j+1}^n-f_j^n]/\Delta u_{j+1/2}^n \geqslant \frac{\lambda}{2}\left(\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n}|f'(u)|\,du-[f_{j+1}^n-f_j^n]\right)/\Delta u_{j+1/2}^n \geqslant 0$$

同理: $D_{j+1/2}^n \geqslant 0$。由(3)可知

$$1 - C_{j+1/2}^n - D_{j+1/2}^n = 1 - \frac{\lambda}{2}\left[\left|f'\left(u_j^n+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n\right)\right|+\left|f'\left(u_j^n+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta u_{j+1/2}^n\right)\right|\right] \geqslant 1-(1+1)/2 = 0$$

所以,Gauss 格式在 CFL 条件(3)限制下为 TVD 格式。

3 数值试验与结论

考虑双曲型守恒律方程组初值问题:

$$\begin{cases} \partial U/\partial t + \partial F(U)/\partial x = 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \end{cases}$$

其中:

$U(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots, u_m(x,t))^T$, $F(U) = (f_1(U), f_2(U), \cdots, f_m(U))^T$, $f_1(U) \in C^2(R^m)$ $i = 1(1)m$. 记 $A(U) = \partial F(U)/\partial U$, $a_1(U)$, $L_l(U)$, $R_l(U)$ $l = 1(1)m$ 为 $A(U)$ 的特征值和相应的左,右特征向量,$L_i(U)R_j(U) = \delta_{ij}$, $ij = 1(1)m$。

令 $U_{j+1/2} = V(U_j, U_{j+1})$ 为 U_j, U_{j+1} 的一个平均值。函数 $V(U,W)$ 是光滑的,满足:

$$\begin{cases} V(U,W) = V(W,U) \\ V(U,U) = U \end{cases}$$

对应地,$A(U_{j+1/2})$ 的特征值,特征向量记为: $a_{j+1/2}^l$, $R_{j+1/2}^l$, $L_{j+1/2}^l$。定义 $\alpha_{j+1/2}^l$ 为:

$$\alpha_{j+1/2}^l = L_{j+1/2}^l\Delta U_{j+1/2}$$

现在我们将差分格式(4)推广到方程组的情形,则:

$$U_{j+1}^{n} = U_j^n - \lambda(H_{j+1/2}^{n} - H_{j-1/2}^{n}) \tag{8a}$$

$$H_{j+1/2}^{n} = \frac{1}{2}(F(U_{j+1}^n) + F(U_j^n)) - \frac{1}{2\lambda}\sum_{l=0}^{m} R_{j+1/2}^l Q(v_{j+1/2}^l)\alpha_{j+1/2}^l \tag{8b}$$

$$Q(v_{j+1/2}^l) = \frac{1}{2}(|v_{j+1/2}^l + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6})\alpha_{j+1/2}^l| + |v_{j+1/2}^l + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})\alpha_{j+1/2}^l|) \tag{8c}$$

下面将格式(8)应用于一维 Euler 方程组的定常喷管问题(Nozzle Problem)进行数值实验。

考虑非齐次 Euler 方程组

$$\partial U/\partial t + \partial F(U)/\partial x + H(U) = 0 \tag{9}$$

其中: $U = \begin{pmatrix} \rho A \\ mA \\ eA \end{pmatrix}$

$$F = \begin{pmatrix} mA \\ (m^2/\rho + p)A \\ (e+p)mA/\rho \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ -p\dfrac{dA}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A(x) = 1.398 + 0.347\mathrm{TANH}(0.8x - 4.0)$$

取时间步长 $h = 0.5$, 应用 H. C. Yee[4] 中的初边值条件进行计算, CFL 数取 0.80, 分别使用 Gauss 差分格式(8) 和著名的 LF 格式及 Up- Wind 格式计算 700 个时间步长, 计算结果如下图。图中•表示密度ρ计算结果, 实线表示方程(9)精确解中密度ρ的值。

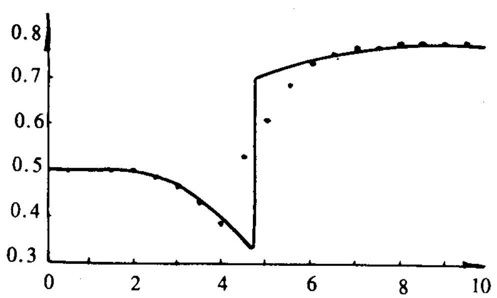

图 1 LF 格式计算结果

从计算结果可以看出, 用 Gauss 差分格式计算结果明显优于用 LF 格式及 Up- Wind 格式计算结果, 因此 Gauss 差分格式是一个有效的格式。

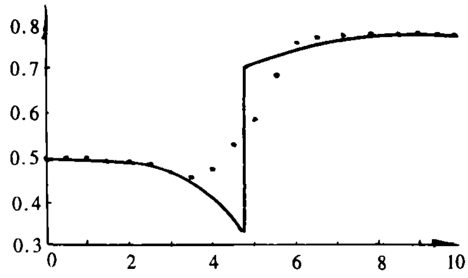

图 2 Up- Wind 格式计算结果

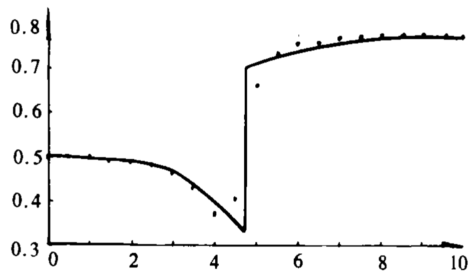

图 3 GAUSS 格式计算结果

参 考 文 献

1 Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws J. Comp. Phys. 1983, 49: 57~ 393

2 Harten A. On a Class of High Resolution Total- Variation- Stable Finite- Difference Schemes. SIAM. Numer. Anal. 1984, 21: 1~ 23

3 Engquist B. & S. Osher One- Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation Laws. Math. of Comp. 1981, 36(154): 321~ 351

4 Yee H C, etc. Implicit Total Diminishing (TVD) Schemes for Steady - State Calculations. J. of Comp. Phys. 1985, 57: 327~ 360

5 邱建贤. 一类大时间步长的TVD 格式. 福建: 厦门水产学院学报. 1995, 17(1) 62~ 66

6 邱建贤 尤克义. 求解常微分方程的 GAUSS 型差分格式. 集美大学学报 1997, 2(4): 1~ 5